

یافت، [محدوده‌ای که] چون ابر کوچکی در انبوه شاخه‌های با رشد نمایی ناچیز می‌نماید. می‌پرسیم: اندازه، شکل و موقعیت این ابر چیست؟ چگونه برحسب زمان تغییر می‌کند؟ چرا با گره‌های ویژه و معینی از این «درخت» قرابت دارد؟ چه قسمت‌هایی از این ابر را «بد» می‌خوانیم و ریاضیات «خوب» چیست؟ پاسخها شاید نهایتاً متکی به هندسه ذاتی درخت باشند. مثلاً مفاهیم محبوبمان: عدد، فضا، تقارن، بینهایت، پیوستگی، خطی بودن و غیره، شاید با گره‌هایی از درخت متناظر باشند که شاخه‌های فوق‌العاده زیادی از آنها بیرون می‌زند. (این به گفته یودی خروشفسکی^۱ با کشفیات اخیر در نظریه مدلها مطابقت دارد.) اما از این گذشته، موقعیت ابر ممکن است به منطق جهان فیزیکی اطراف ما وابسته باشد و شکل ابر حاصل پیچیدگی ترکیببندی و دینامیکی مغز بشری باشد. (و با اکره باید تأثیر عاملهای تاریخی و اجتماعی را بپذیریم، همچون روندهای پشتیبانی مالی از ریاضیات.)

پیش از اقدام به پاسخگویی، نیاز داریم راهی بیابیم برای بررسی موضعی این «ابر در درخت» و توصیف حتی المقدور موشکافانه آن با زبانی مناسب. سپس قواعدی برای گسترش این ابر در زمان بجوییم. چه چیزی راهنمای ما در درخت هیلبرت است و ما را از فلاکت پیچیدگی^۲ بی‌معنی و تصمیم‌ناپذیری^۳ به دور نگه می‌دارد؟ آیا نظام خود درخت است یا تصویری از غریزه بقا، نوعی حس هفتم، یا برنامه‌ای که به صورت محصول جانبی و تصادفی تکامل زیستی (فرهنگی) ظهور می‌کند؟ که می‌داند؟ این یک بررسی موشکافانه می‌طلبد و وسوسه می‌شویم که احساسات غریزیمان را دنبال کنیم، چشمان را ببندیم و دیدگاه افلاطونی را در آغوش بکشیم. اینجا، «جهان حقیقی ریاضیات واقعی» وجود دارد، که در آن مغز ما به عنوان یک ایستگاه رله بین ما و این جهان عمل می‌کند، از طریق نیرویی مرموز در «میدان معناشناختی»^۴. رؤیایی می‌نماید (و می‌توان آن را به یک داستان علمی-تخیلی درخشان تبدیل کرد). اما قابل قبول نیست مگر آنکه آماده باشیم از تعقل دست بکشیم. (اما تعصب دینی در مورد اعتقاد افلاطونی به حقیقت مطلق و هماهنگی درونی ریاضیات، پیش‌نیاز موفقیت در کشف و اثبات قضایای درخشان است. خلاقیت از بی‌منطقی همان قدر نیرو می‌گیرد که از زاد و ولد.

ر. ل. نظرتان درباره محکهای زیبایی‌شناسی در ریاضیات چیست؟
 م. گ. اگر به خاطر احساس مثبتی نسبت به ریاضیات نبود از همان ابتدا ریاضیدان نمی‌شدیم. این را «زیبایی‌شناسی» بنامید یا «عشق اخلاقی به حقیقت» یا هر نام (البته اصیل!) دیگری. این توضیح واضح است، بازی صرف با لغات، که آنقدر ارزش ندارد که به زبان آورده شود. و کجا [می‌توان] شاهدهی بنیادی برای تأثیر زیبایی‌شناسی بر ریاضیات یافت؟ شاید در آینده؛ تصور کنید که ۲۰ میلیون سال دیگر اخلاف هوشمندی از گونه‌های امروزی را ملاقات کنید که از موهبت درک فطری زیبایی‌شناسی برخوردار شده باشند. ظاهراً برخی پرندگان از این لحاظ از انسانها سبقت می‌گیرند، مثلاً طاووس (ماده) و مطمئناً پرنده‌های آلاچیق^۵ که نوع نر آنها «آشپانه‌ها»ی مفصلی ساخته و تزئین می‌کنند که اختصاصاً برای جلب ماده‌ها در فصل جفت‌گیری است. اگر اخلاف طاووسها (دست کم آنان که به ریاضیات قدری می‌نهند) میل خاصی به الگوهای هندسی پیچیده از خود نشان دهند (مثلاً به کاشی‌کاریهای نامتناوب فکر کنید) مشابه (؟) احساسی که به طاووس دوستان

ریمی لانژون. حقیقت ریاضیات چیست؟ آیا مستقل از تمام علوم دیگر است؟ مستقل از جامعه؟ آیا نوعی زبان است؟

میخائیل گروموف. ما ریاضیدانان به خود می‌بالیم که چنان پرورش یافته‌ایم که صورتبندی دقیق یک مسئله را بر پاسخ دادن [به آن] مقدم بداریم. پس بر تمایل خود به حرف زدن عجولانه از نظرات محبوب دیرینه‌مان درباره «ماهیت ریاضیات» مهار می‌زنیم و هوشیارانه (یا با تظاهر به هوشیاری) به دنبال مدلهایی موجود از ریاضیات می‌گردیم که به ما امکان صورتبندی سؤالیهای معنی‌دار را بدهند. رهیافت اصل موضوعی، که در اواخر قرن نوزدهم کشف شد، چنین امکانی را پیش می‌نهد. این را هیلبرت آیین (صورتگرایی) خود قرار داد، که در آن بدنه ریاضیات به صورت «درخت»ی عظیم با رشد نمایی متصور می‌شود، «درخت تمام فرمولهای ریاضی ممکن» که از اصول موضوع می‌روید.

حال سؤالیها به آسانی در پی می‌آیند. هندسه و توپولوژی کلی این «درخت» چیست؟ «مقیاس بشری»، یعنی اندازه شاخه‌های در دسترس انسانهای ریاضیدان، کدام است؟ چه الگوهایی در این «درخت» نماینده چیزهایی هستند که آنها را «قضیه» می‌خوانیم؟

گودل خاطرنشان کرد که این «درخت» ناهمبند است و در نتیجه ممکن است شاخه‌هایی با پیچیدگی نامتناهی داشته باشد که هیچ مخلوق ریاضی بختی برای بقا در آن نداشته باشد. از آن پس بیشتر ریاضیدانان برنامه (مدل) هیلبرت را نادیده گرفتند و مطالعه «ساختار ریاضیات» اساساً تعطیل شد. و علاوه بر کابوس «شاخه‌های گودلی»، صرف‌رشد نمایی «درخت» هیلبرت آن را حتی برای نمایش «ریاضیات زمینی» ناکافی می‌سازد. پس به مدل بهتری نیاز داریم. ر. ل. انتخاب اینکه در میان تمام امکانها چه چیزی معنی‌دار است چگونه صورت می‌گیرد؟

م. گ. من از کلماتی چون «مناسب»، «جالب»، «مهم» و غیره، که به منظور کنترل اذهان مردم به کار برده می‌شوند، احساس ناراحتی می‌کنم. این کلمات برای توصیه نامه خوب اند (و کلاً برای گذران موفقیت‌آمیز زندگی یک ریاضیدان در جامعه بشری)، اما اینجا (امیدوارم که) مسئله‌ای برای حل داشته باشیم، نه کمیته‌ای که متقاعدش کنیم.

بگذارید به صعود از درخت هیلبرت ادامه دهیم، جایی که خود را در محدوده بسیار کوچکی، که همان «ریاضیات بشری» خودمان باشد، خواهیم

1. Udi Hrushovski 2. complexity 3. undecidability
 4. semantic field 5. bowerbirds

ماست که انتظار داریم NP خیلی با P فاصله داشته باشد. این شکافی بنیادین در درک ماست — اگر درکی باشد — از اینکه ریاضیات چگونه کار می‌کند. ما علاوه بر فکر محض، به آزمایشهای زیست‌شناختی، روان‌شناختی و/یا رایانه‌ای نیاز داریم. اما ما به‌عنوان یک جامعه، از چنین مسائلی از ترس آلودگی به فلسفه، سر باز می‌زنیم. ما بسیار مفتخریم از اینکه دربارهٔ چیزی صحبت کنیم که 10^{10} ٪ [آن را] نمی‌فهمیم ولی شاید باید در برخی مواقع از دانشمندان [علوم تجربی] تقلید کرده سعی کنیم با دید ۵٪ برانیم. نمی‌توانیم همه چیز را به تمامی بدانیم، ولی این دلیلی برای در خانه ماندن نیست.

ر. ل. برخی افراد تمام عمرشان در یک مبحث کار می‌کنند ...
 م. گ. حتی بهترین اذهان ممکن است با دنبال کردن مسیرهای ریاضی تا عمق، به محدودیت دید دچار شوند، چه یک مبحث باشد چه یک دوچین. کلاین به برنسايد و فروبنیوس حمله می‌کرد و زیگل، لنگ^۱ را به سطحی‌نگری متهم. اما بعضی مواقع وسیع بودن بیشتر صرف می‌کند تا عمیق بودن و به سبب گسترش‌نمایی درخت هیلبرت هیچ‌کس نمی‌تواند هر دو خصیصه را داشته باشد.
 ر. ل. نقش وقایع غیرمنتظره در ریاضیات در قبایس با نقش پوناها [دری].
 م. گ. واقعهٔ غیرمنتظره بیش از چیزی که انتظارش می‌رود مورد انتظار ماست. من این مطلب را که بعضی اوقات امور دقیقاً آن‌چنان اتفاق افتاده‌اند که انتظارشان می‌رفته است جذابتر می‌یابم (قضیهٔ فرما را ببینید). «معجزه» است؛ چگونه ممکن است؟ برنامه‌هایی مثل آنچه در هندسهٔ جبری یا توپولوژی جبری وجود دارد و عمدتاً از کار سیر^۲ نشأت می‌گیرد به طرز جالب توجهی موفق بوده‌اند، و این یک «معجزه» است.

ما برای فهم چشم‌انداز ریاضیات هنوز خوب مهیا نشده‌ایم، شاید فاقد زبان مناسب هستیم. زبانی داریم که با آن می‌توانیم هر چیزی را بیان کنیم، اما شاید کارا نباشد. مثل نظریهٔ خورشیدمرکزی که برای توصیف منظومهٔ شمسی کاراست، نه به دلایل ریاضیاتی بلکه به دلایل روان‌شناختی. از نظر محاسباتی، این فقط کمی بهتر از نظریهٔ بطلمیوسی است. با این وصف، تغییر منطق به دانشمندان این امکان را داده است که دیدگاه متفاوتی نسبت به واقعیت پیدا کنند.

ر. ل. سؤال جنبی: آیا رابطه‌ای میان زبان، گروهی که به آن تعلق دارید، و روشی ریاضی‌ورزی شما هست؟
 م. گ. البته که هست، ولی در اینجا ما نه دربارهٔ زبان(های) ریاضی، که دربارهٔ زبانی برای توصیف ریاضیات صحبت می‌کنیم، چیزی که باید مکمل منطق ریاضی و صورتگرایی هیلبرت باشد. مثلاً، معنی دقیق «شباهت» میان دو قضیه (اثبات) یا احساس سربالایی رفتن یک برهان چیست؟ ما هنوز حتی یک سیستم بطلمیوسی هم نداریم. شاید بازی با رایانه و تولید «ریاضیات مصنوعی» به ما بیاموزد که چیز واقعی چیست (همان‌طور که برخی این کار را با حیات مصنوعی می‌کنند).

ر. ل. بازدهای کانوی^۳ را به یاد بیاورید.
 م. گ. سعی کنید کاری بسیار متفاوت با آنچه اذهان ما انجام می‌دهد انجام دهید، برخی قواعد را استخراج کنید و ببینید وقتی آنها را به‌طور ماشینی پیروانید چه می‌شود، متوجه‌اید که. منظور، فاصله گرفتن از شهود است.
 ر. ل. نکتهٔ ۱۹۹۹؛ ریاضیات در طول نیم قرن اخیر.

با مشاهدهٔ دههای رنگارنگ اجدادشان دست می‌داد، «ایدهٔ زیبایی‌شناسی» پشتوانهٔ قابل ملاحظه‌ای خواهد یافت. و اگر انتظار برای ظهور طاووسها و پرنده‌های عاقل غیرعملی به‌نظر می‌رسد، دربارهٔ نظام مغز خودمان بیشتر فراگیریم و ببینیم که آیا «مرکز زیبایی‌شناسی» (اگر اصلاً چنین چیزی موجود باشد) به «مرکز ریاضیات» متصل است یا نه].

ر. ل. انگیزشهای بیرونی چه‌طور؟
 م. گ. «چشم ذهن» ما با نقاط کوری پوشیده شده است. نگاه از بیرون به شفافیت بیشش ما کمک می‌کند.

ر. ل. آیا مثالهایی از مسرهای که فراهمی شده‌اند دارید؟
 م. گ. در هر نقطهٔ درخت هیلبرت تعدادی نمایی (به‌عنوان تابعی از طول) راه برای انتخاب داریم، ولی غالباً احساس می‌کنیم «جایی برای رفتن نیست». شاید به خاطر این باشد که اتفاقاً در قعر «جاه»ی موضعی ایستاده‌ایم (با تجسم هندسی مناسبی از درخت) یا به خاطر تطابق مسیرهای بالقوه با نقاط کور ذهنمان. احتمالاً بیشه‌ایم موقعیت را از دست می‌دهیم و فقط وقتی از آن آگاه می‌شویم که شخص دیگری آن را به ما گوشزد کند. یک مثال، نظریهٔ اطلاعات شانون^۱ است. ما نسبتاً با تأخیر به روند تکوین نظریهٔ یانگ-میلز^۲ پیوستیم، نظریهٔ زایبرگ-ویتن^۳ از نظرمان دور ماند و از فیزیکدانان در زمینهٔ میدانهای همدیس و ریسمان عقب هستیم. در مبحث پرهیجان کامپیوترهای کوانتومی و DNA مشارکت نداریم.

ر. ل. چرا بعضی از ریاضیکاران کم‌کم از آن‌چه ریاضیات «محض» نیست منجز می‌شوند؟
 م. گ. پیروی از قول سقراط دردآور است: از هرچه نمی‌دانی به تمام و کمال آگاه باش.

ر. ل. بسیاری از مردم بر این گمان‌اند که دانش در ریاضیات به کمال رسیده است ...
 م. گ. دقیقاً، دربارهٔ آنچه نمی‌دانید کمتر می‌باید ... مرزها به نوعی کندتر از درون رشد می‌کنند.

ر. ل. بسنگی دارد، اگر در يك فضای هندلوی باشید ...
 م. گ. مغز هر ریاضیدان تکه‌ای از «ابر در درخت» مان را به همراه دارد، ابر شخصی کوچکی دقیقاً همان‌جا که سیناپس‌هایمان با درخت هیلبرت تماس می‌بایند. این ابرهای کوچک ممکن است هندسهٔ فرکتالی و در نتیجه مرزهای نسبتاً بزرگ داشته باشند. در این مرحله گفتنش سخت است ولی شاید بتوان آن را با حرکات بشرقیاس کرد که در آن سیستم نورونی ما، آن‌گونه که آزمایشها نشان می‌دهند، با داشتن درجهٔ آزادی بسیار از خیلی از مسیرها اجتناب می‌کند. این شاید راهبرد ریاضی مغز ما هم باشد، که مثلاً باعث تساوی $P = NP$ در ریاضیات روزمره می‌شود. ما اساساً مسائلمان را با همان سرعتی حل می‌کنیم که بیانشان می‌کنیم. احياناً دو هزار مغز-ساعت برای بیان قضیهٔ فرما صرف شده است و فقط لحظه‌ای (در مقایسه با $2000 \exp$) برای حل آن، حداکثر 10^5 مغز-ساعت. (در واقع باید طول اثبات را مقایسه کرد با زمانی که برای یافتن آن لازم است). شاید کودناتردین اثبات [قضیه] فرما با واحدهای معقول، از مرتبهٔ لگاریتم زمان صرف شده برای جستجوی اثبات باشد. این (تساوی عملی $P = NP$) در تناقض آشکار با شهود ریاضی

- م. گ. همان‌طور که همه می‌دانند مقدار زیادی مطلب ریاضی پرورنده شد، و بیش از پیش بر ساختار تأکید شد. از سوی دیگر در یک مجلهٔ چهارم تقریباً دربارهٔ همه چیز می‌توانید بخوانید، در مجلات امروزی دیگر چنین نیست. در دههٔ چهارم می‌توانستید ۵۰٪ مطالب منتشره را بخوانید. ریاضیات بسیار تخصصی‌تر شد و این پیامدهای خوب و بد دارد. اکنون غیرحرفه‌ای‌ها بسیار اندک‌اند، همچنان که در ورزش، و نمی‌دانم که مردم عموماً در ورزش پیشرفت کرده‌اند یا نه. به همین ترتیب اینکه آیا بشر در کل برای فهم جهان مهیاتر شده است روشن نیست. یکی از ریاضیدانان بسیار حرفه‌ای هم عصر ما را بردارید و او را در محیط فکری جدیدی بگذارید. آیا او به خوبی افراد دوره‌های قبل عمل خواهد کرد؟
- در واقع تمامی تمدن بسیار تخصصی‌شدهٔ ما مصداق این مطلب است. تصور کنید ما را به محیط اجدادمان برگردانند.
- ر. ل. کافی است پژوهشگر جوانی را به کشور دیگری منتقل کنید، برخی [با محیط جدید] سازگار می‌شوند و برخی نه، و آنان که چنین تجربه‌ای را با موفقیت می‌گذرانند غالباً همان‌هایی هستند که بعداً موفق می‌شوند.
- م. گ. کاملاً، و اگر به ریاضیات برگردیم، گمان می‌کنم این حرف با این گفته آدامار توافق دارد: «ایده‌های ساده در پایان کار ظهور می‌کنند». طول اثبات‌های ما غالباً به‌خاطر تاریخچهٔ آنهاست و نظام تخصصی کنونی ریاضیات ما را از [نگرش افقی]، و لذا میان بر زدن، باز می‌دارد.
- ر. ل. گریچه وقتی نتیجه‌ای را توضیح می‌دهید، راه میان‌بر گاهی زیادی کوتاه است.
- م. گ. نکتهٔ اصلی این نیست که آنها کوتاه‌ترند، بلکه این است که جهت را تغییر می‌دهند. این محتاج انواع متفاوتی از تواناییهاست.
- ر. ل. پس شما بین توانایی تشخیص جهت درست و توانایی یافتن میان‌بوها و بازآرایی دانسته‌ها در وهلهٔ بعد تمیز قائل هستید.
- م. گ. و این تواناییها نیاز به انواع متفاوتی از آمادگی دارد. همچنین، وقتی ریاضی می‌ورزید مهارت‌هایتان را در نوع خاصی از فعالیتها بیشتر می‌کنید، حال آنکه در آغاز استعدادهایتان تقریباً هم‌سطح بوده است. مثلاً اگر تمام عمرتان به هندسهٔ ترکیبی^۱ بپردازید توانایی شما در کار با اعداد محو می‌شود. برای جبران این امر به تنوع بیشتر در آموزش احتیاج داریم.
- ر. ل. یعنی تنوع فکری را حفظ کنیم؟
- م. گ. بله، این امری حیاتی برای بشریت است: تنوع روشهای تفکر، در علوم انسانی و نیز در ریاضیات (رجوع کنید به کتاب دایسن^۲ با عنوان تفاوت و تنوع).
- ر. ل. نکات دیگری دربارهٔ ۵۰ سال گذشته [دارید]؟
- م. گ. این به نوعی یک سؤال تخصصی است؛ چیزهای زیادی اتفاق می‌افتند، نمی‌دانم کدام را انتخاب کنم.
- ر. ل. فکر نمی‌کنید بخواهید موضوعی را انتخاب کنید؟
- م. گ. خیلی زیادند ...
- ر. ل. نکتهٔ سوم؛ جامعه از ریاضیدانان چه توقعی می‌تواند داشته باشد؟
- م. گ. سؤال دوپهلویی است — منظورتان از لغت فرانسوی «droit» چیست؛ معنای اخلاقی آن مورد نظر است [یا] معنای حقوقی؟
- ر. ل. معنای اخلاقی را در نظر بگیرید.

۱. هندسهٔ اقلیدسی (در برابر هندسهٔ تحلیلی) - م.

2. Dyson

1. Tartaglia 2. Ferrari

ر. ل. پس فکر می‌کنید چنین مباحثهٔ جدلی علاقهٔ عموم را برانگیزد؟

م. گ. جامعه باید بداند که ما ریاضیدانان زنده هستیم. متأسفانه بسیاری از روشنفکران فرانسه که به علوم انسانی مشغول اند می‌پندارند که ما کودکان و ملال آوریم.

ر. ل. به این وضوح هم نیست، من فرصتی برای کار با افرادی که در علوم انسانی فعالیت می‌کنند داشتم و آمیزه‌ای احساس کردم از آن چه می‌گویند و احترامی مبالغه‌آمیز. وقتی کسی استدلالی را در [لغاف] از ریاضیات می‌پسندد [آن استدلال] جدی به نظر می‌رسد و آنها جرأت حمله به آن را ندارند.

م. گ. چه ریاضیات تقلبی و مزاحمی!

ر. ل. البته، و ما حداقل باید مداوماً سعی کنیم آن را اصلاح و به مسیر دیگری هدایت کنیم... این به آن معنی نیست که هدفی نهایی وجود دارد که روشن است، اما دست‌کم می‌توانیم در جهت بهبود بکوشیم.

م. گ. ما ریاضیدانان نباید فقط بر ریاضیات به طور اخص تأکید کنیم، بلکه می‌توانیم سراج مناظره‌های جدی با جامعه باشیم، تفکری در سطح عالی روشنفکری. تفکر جدی، که ریاضیات جزئی از آن است.

ر. ل. اخیراً پرس و جویی خیلی خودمانی کردم؛ از بعضی کسانی که در شان را هفت-هشت-ده سال قبل تمام کرده بودند پرسیدم از آنچه در ریاضیات دانشگاه یا مدرسه آموخته‌اند چه به یاد می‌آورند، جواب نه از ده‌شان این بود: هیچ! این [جواب] کار اشخاصی مرتبط با آموزش را در معرض تردید قرار می‌دهد، دوم اینکه آیا این جواب درست است؟ من شخصاً فکر می‌کنم که نه؛ با جستجوی دقیقتر باید آنچه را باقی مانده بیرون کشید، ولی چرا چنین واکنش اولیه منفی‌ای؟ بخشی از مشکل چیزی است که تدریس می‌کنیم.

م. گ. من معتقدم مشکل دیگری هم در مدارس هست.

ر. ل. [حال بپردازیم به] فعالیتتان: کجا، کی و چگونه کار می‌کنید؟

م. گ. وقتی جوان بودم می‌توانستم تمام روز کار کنم. افسوس، دیگر نمی‌توانم! ر. ل. من عکسش را گمان می‌کردم؛ وقتی شروع کردم خیلی سخت بود که واقعاً آغاز به کار کنم، بعداً بازه با [افزایش] تجربه افزایش یافت.

م. گ. آیا جسمت هنوز در برابر تفکر جدی مقاومت نمی‌کند؟

ر. ل. گاهی اوقات، ولی این افزایش بازه در سنین بین ۲۰ و ۳۰ را بیشتر به یاد می‌آورم.

م. گ. گمان من دقیقاً برعکس نیست. اول اینکه وضعیت دانشجویان با وضعیت پژوهشگر متفاوت است. بگذارید به خاطر بیاورم... از لحظه‌ای که شروع کردم، از سن ۲۰ سالگی، به نوع احساس تنزل می‌کردم.

ر. ل. شاید چون با سرعت خیلی زیادی شروع کردید؟

م. گ. البته در ابتدا کار خیلی فشرده بود.

ر. ل. روزی ۱۰ ساعت؟

م. گ. گاهی بیشتر.

ر. ل. چگونه کار می‌کنید؟ آیا به کمی تمرکز، محیط ساکت، مکان مشخصی احتیاج دارید؟

م. گ. مسلماً سکوت.

ر. ل. یا می‌توانید در مترو، در حال راه رفتن... کار کنید؟

م. گ. آن هم بله، ولی برای مقاصد مختلف به چیزهای مختلفی نیاز دارید. گاهی لازم دارید که بنشینید و بنویسید. به هر حال من سرو صدا را دوست ندارم. ر. ل. آیا نوشتن برای شما لذت بخش است؟

م. گ. این با گذشته [زمان تغییر کرده است، وقتی جوان بودم از آن نفرت داشتم، حال دارم به آن علاقه پیدا می‌کنم. حس می‌کنم چیزهای کمتر و کمتری برای گفتن دارم ولی می‌توانم آن را بهتر بیان کنم زیرا می‌دانم چگونه بیان کنم.

ر. ل. آیا اصطلاح جدیدی ابداع کرده‌اید؟

م. گ. بله، فکر می‌کنم. مطمئناً چندتایی ابداع کرده‌ام. سؤال این است که چه تعداد از آنها مقبولیت یافته است. من از پاسخ دادن به این سؤال اگرچه دارم، چون ممکن است برآوردم مبالغه‌آمیز باشد.

ر. ل. من به «زبان‌شناسی» هم علاقه دارم، وقتی اصطلاحی وضع می‌کنید، [آن اصطلاح] از کجا می‌آید؟

م. گ. نه، شما لازم نیست کلمات را اختراع کنید، فقط سعی می‌کنید واژگان مناسب را بیابید، همان کاری که هر کس دیگری می‌کند.

ر. ل. برخی افراد اصلاً اهمیتی [به اصطلاح] نمی‌دهند و برخی سعی می‌کنند ایده آنچه را که می‌خواهند بگویند در يك لغت خلاصه کنند.

م. گ. انتخاب لغت مناسبی که تداعی‌های جالبی به همراه بیاورد و ذهن‌تان را با آن چه به شما گفته می‌شود هماهنگ کند فرهنگ ریاضی می‌خواهد. به همین دلیل بورباکی از این لحاظ خیلی خوب است و اصطلاحات ریاضیدانان جوان غالباً خام و گمراه‌کننده است. (مثالهایی دارم ولی احتیاج به دشمن ندارم.) همچنین وقتی زمینه‌های کاری را به هم می‌پیوندید دقت در واژگان سرنوشت‌ساز است. کافی است ۱۰ دقیقه با افرگا بر صحبت کنید تا بفهمید چقدر لهجه شما دهاتی است!

ر. ل. چه وقت فکر می‌کنید که نتیجه‌ای باید چاپ شود؟

م. گ. وقتی جوان بودم می‌توانستم سالهای زیادی برای رسیدن به نتیجه نهایی تلاش کنم، این گاهی اوقات اتفاق می‌افتاد. حالا چنین انتظاری ندارم و خیلی سریعتر چاپ می‌کنم.

ر. ل. معمولاً مردم دقیقاً به خلاف این عمل می‌کنند، جوانان نیاز دارند سطوری به کارنامه‌شان بیفزایند، و وقتی پیرتر می‌شوند سطح توقعشان بالاتر می‌رود.

م. گ. عامل دیگری هم هست. وقتی جوان بودم کاری می‌کردم و ۱۰ سال بعد هرچه بود به خاطر می‌آوردم، بنابراین زحمت نوشتن را به خود نمی‌دادم. اکنون اگر نوشتن را به تأخیر بیندازم ممکن است محتوا را فراموش کنم. می‌توانم به راحتی آنچه را در بیست سالگی انجام می‌دادم به یاد بیاورم، ولی برای به یاد آوردن آنچه ۳ سال قبل می‌کردم نیاز به تلاش دارم.

ر. ل. پس بسیار پیش از پیش نوعی فوریت احساس می‌کنید؟

م. گ. کاملاً، چون وقتی جوان هستید زمان نامحدودی در پیش دارید.

ر. ل. به هر حال محدود است.

م. گ. شما به این نحو فکر نمی‌کنید. البته زمان زمان مطلق نیست، زمان درونی است که سریعتر از زمان واقعی تحلیل می‌رود، چون مقدار اطلاعاتی که در مغزتان پردازش می‌کنید با سن کاهش می‌یابد.

ر. ل. آیا شما دانشجو دارید؟

م. گ. نه خیلی. ۵ یا ۶، مطمئناً کمتر از ۱۰ نفر در مجموع.

قضیه رمزی (که در سال اول دانشگاه آن را یاد گرفتیم) حاکی است که از میان شش نفر، دست کم سه نفر دوه دوبا هم آشنا هستند یا دوه دوبا هم بیگانه اند. در آن هنگام خیلی افتخار می کردم که آن را تعمیم داده ام تا قضیه رمزی کلی را به دست آورم، نتیجه ای که البته معلوم شده بود، و در همان زمان دستاورد دورتسکی^۱ درباره مجموعه های محدب منتشر شده بود، و همین طور قضیه ون در واردن^۲ را می دانستم (پیدا کردن تصاعدهای حسابی در مجموعه هایی از یک افزاز اعداد). وقتی با این سه گزاره مواجه می شوید، در این قالب مشترک در می آیند که می خواهید اشتراکی ناهتی باشد. سعی کردم از توپولوژی جبری استفاده کنم و این به طور جزئی (و فقط به طور جزئی!) برای [قضیه] دورتسکی کارایی داشت ولی نه برای حالات دیگر، که در آنها ظاهراً مجموعه ها به این دلیل یکدیگر را قطع می کنند که اندازه شان بزرگ است (و نه «محتوای هومولوژیک» شان). سرانجام حدود ۲۰ سال پیش، این توسط فورستریگ^۳ در اثبات «ارگودیک» اش از قضیه سمردی^۴ به صورت یک مفهوم درآمد و ایده هایش از آن زمان تا کنون بسیار توسعه یافته است. من هنوز هم می پندارم که ساختار هندسی نهفته ای آنجا هست، نه فقط شمارش صرف، ولی ۱۰ سال قبل، پس از ۲۵ سال شکست، دست از فکر کردن در این باره برداشتم.

ر. ل. چطور تعیین می کنید که چه چیز برایمان مهم است؟

م. گ. بیشتر عمرم فقط از احساسم پیروی کرده ام. اکنون سعی می کنم به سوی یادگیری (متأسفانه سطحی) ایده هایی از علوم [طبیعی] بروم که بیشنی متفاوت با آنچه از اثبات قضایا به دست می آید، به آدم می دهند.

ر. ل. همین طور ایده های شهود پراونگیز ...

م. گ. بلکه یادگیری.

ر. ل. فکر می کنم حتی در کاری که شما می کنید، تغییر رشته پس از چهار پنج سال تحقیق در يك موضوع، هنگامی که ممکن است شروع به تکرار کارهای قبلی کنید، نوعی ریسک است، ولی پس از دو سه سال شاید چیزی تولید کنید که از کار فرضیتان در حوزه [تحقیقی] اولتان نوتر باشد. م. گ. مثل این نیست که برای رفتن به میهمانی ای دوش بگیرید که ممکن است لغو شود، و ریسک پاکیزه شدن به خاطر هیچ را بپذیرید؟ من یادگیری و خلق ایده های نو را از هم جدا نمی کنم. «نو» موضوع را هیجان انگیز می کند. ر. ل. من در کتابی از کودن^۵ درباره نوآوری خواندم که حرف وارد کردن ایده ای از يك حوزه به حوزه دیگر را باید گامی معنادار به حساب آورد، م. گ. نکته درستی است. در ضمن، بخشی اساسی از ریاضی ورزشی، بازآرایی اذهان خودمان است. آنچه از شما ریاضیدان می سازد ذهن شماست، نه فقط قضایای اثبات شده. پس ما هم یاد می گیریم و هم سعی می کنیم قضایایی ثابت کنیم؛ هردوی این کارها را می کنیم تا ذهنمان را تعالی بخشیم. مطمئناً قضیه ای خوب نمایانگر ذهنی درخشان است، ولی از نظر اجتماعی، ذهن عالی را بسیاری، نه فقط ریاضیدانان، تشخیص می دهند، حتی اگر میوه رسیده این ذهن از دسترسشان دور بماند. بنابراین ارزیابی «ریاضی ورزشی» (نه فقط دانش ریاضی) بسته به منظرمان شدیداً تفاوت می کند.

ر. ل. البته درس و تمرین به تنها بی کافی نیست.

م. گ. مطمئناً، اما اگر [چیزی] را بخوانید و بیاموزید آن چیز از آن شما می شود، فقط آن را از بر نکرده اید؛ البته بهتر آن است که بتوانید کار قابل توجهی

1. Dvoretzky 2. Van der Waerden 3. Furstenberg
4. Semeredi 5. Kuhn

ر. ل. خیلی بد نیست! بعضیها مانند ما شین فارغ التحصیل تولید می کنند، ولی اگر شما دانشجویانی تربیت کنید که بعدها راه خاص خودشان را در پیش بگیرند [موضوع] تفاوت می کند (افرادی چون پانسو در نظر هستند) ... م. گ. پانسو و لاپوری^۶ از همه بهترند.

ر. ل. یاد می آید که يك دانشجوی مشترك هم داشتیم؛ زغیب^۷ ...

م. گ. تجربه خوبی بود.

ر. ل. احساس می کنید که دنباله رو چه کسی هستید؟ اگر اجازه داشته باشید نام دو یا سه ریاضیدان را ذکر کنید چه کسانی را برمی گردانید؟

م. گ. افراد دو دسته اند، آنها که در اطراف من بوده اند و نویسندگان مقالاتی که شخصاً با آنها آشنایی نداشته ام.

ر. ل. بگذارد با اطرافیان آغاز کنیم.

م. گ. در لتینگراد، استاد من زخلین^۸ بود. از بوریس ونکف^۹ (جبردان) هم می آموختم، اطلاعات بی حد و حصری داشت. وقتی برایم توضیح داد که چگونه قضیه های^{۱۰} از دنباله طیفی لوری^{۱۱} نتیجه می شود تحت تأثیر قرار گرفت [و] به این ترتیب در جرگه طرفداران پر و پا قرص توپولوژی جبری درآمد. و بعدها از یورا بوراگو^{۱۲} و تولیا ورشیک^{۱۳} چیزهایی آموختم. سپس تحت تأثیر کاژدان^{۱۴} و مارگولیس^{۱۵} بودم، که خیلی ملاقاتشان نمی کردم، و همین طور غیرمستقیم [تحت تأثیر] آرنولد. ایده های او [که] از طریق افراد دیگر [به من می رسید] برایم مهم بود، به خصوص پنداره هایش در هندسه هماتافته^{۱۶}.

ر. ل. آرنولد خیلی از شما مستر است؟

م. گ. نه، شاید پنج سال، ولی او در مسکو بود. مقالاتی هم بودند، و آغاز زندگی حرفه ای من با [مطالعه] کارهای اسمیل^{۱۷}، نش^{۱۸}، هرش^{۱۹} و هفلیگر^{۲۰} شکل گرفت. نش قهرمان من بود. معتقدم که هنوز تنها کسی هستم که مقاله هایش را با دقت می خوانم.

ر. ل. از نظر شما ریاضیدانان مهم، به ویژه در دوره ما، چه کسانی بوده اند؟ م. گ. فکر نمی کنم کار خوبی باشد که اسم آنها را ذکر کنیم، چون ممکن است کسی را فراموش کنیم.

ر. ل. خوب، بیاید ۲۰ نفر، ۱۰ نفر را نام ببریم.

م. گ. همه ما در مورد بیشتر اسامی توافق داریم.

ر. ل. این داهی برای فرار از سؤال است ...

م. گ. بله.

ر. ل. آیا با شکست مواجه شده اید؟

م. گ. مکرراً. مسائل بسیاری هستند که به آنها دست می یازید و نمی توانید حلشان کنید. گاهی کس دیگری آن را حل می کند.

ر. ل. و پیامد چنین شکستی چه بود؟ آن حوزه را ترك می کردید یا برخی اطلاعات را برای استفاده بعدی حفظ می کردید؟

م. گ. نه، برخی مسائل هستند که مدت زیادی به آنها فکر کردم و نتوانستم حلشان کنم و دیگر به آنها فکر نمی کنم.

ر. ل. می خواهید نمونه ای ذکر کنید؟

م. گ. سالهای زیادی به قضایای از نوع رمزی^{۱۷} فکر کردم. اولین صورت

1. Pansu 2. Laborie 3. Zeghib 4. Rochlin 5. Venkov
6. Helly 7. Leray spectral sequence 8. Yura Burago
9. Tolia Vershik 10. Kazhdan 11. Margulis 12. symplectic
13. Smale 14. Nash 15. Hirsh 16. Haefliger 17. Ramsay

انجام دهید؛ و اگر ریاضیات را ترک کنید برحسب قضایا [یبی که ثابت کرده‌اید] ارزیابی نمی‌شوید بلکه با معیارهای دیگری سنجیده می‌شوید که دستیابی به آنها حتی مشکلتر است.

ر.ل. من نظرم این است که این دشواری از نوع دیگری است و بستگی به اهمیت کاری که انجام می‌دهید دارد؛ به هر حال موافقم که ارتباط برقرار کردن با شخصی در زمینه دیگر و پاسخ دادن به سؤالاتش، چالشی است؛ مهم نیست که پاسخ آن سالها قبل بر ریاضیدانان مکشوف شده باشد. م.گ. سخت است عوامل درونی و بیرونی را از هم مجزا کنیم. در آغاز، به خصوص وقتی جوان هستید، یادگیری را آغاز می‌کنید چون یادگیری را دوست دارید، چون فکر می‌کنید قضیه‌هایی ثابت خواهید کرد، و این انگیزه درست است.

ر.ل. نه فقط یادگیری، بلکه این چالش که با ایده‌ها چنان گامی کوچک بردارید.

م.گ. وقتی خیلی جوان هستید شاید بلندپروازی‌هایی داشته باشید ولی کمابیش ساده‌لوحانه‌اند.

ر.ل. بله، ولی سعی خود را می‌کنید.

م.گ. اما اصولاً می‌خواهید که یاد بگیرید، دنیای نامتناهی علم در برابر شماست، البته فکر می‌کنید که شما هم می‌توانید [چیزی] عرضه کنید ...

ر.ل. منظورتان از جوان چیست، ۱۰ ساله؟ ۱۵ ساله؟

م.گ. بین ۱۰ تا ۲۰. اما آنچه رشد می‌یابد، که هم مثبت و هم منفی است، مشارکت شخصی شماست؛ و این امر خلوص بینش شما را تا حدی آلوده می‌کند. با این دیدگاه، یادگیری چیز نو خیلی خوب است چون کاری ندارید که با آن بکنید، برای شما دانش محض است. از نظر عاطفی درگیر نیستید و خیلی بیشتر یاد می‌گیرید. می‌توانید به گشاده ذهنی طبیعی خود بازگردید. اگر اصلاً چنین کاری نکنید درجا می‌زنید. ما از چیزهای نو لذت می‌بریم.

ر.ل. می‌بینید! از معیارهای زیباشناسانه استفاده می‌کنید!

م.گ. من [به اینها] می‌گویم عاطفی.

ر.ل. زمینه‌های خانوادگی شما چیست؟ چه چیزی برای شما تعیین‌کننده بوده است؟

م.گ. وقتی ۹ ساله بودم مادرم کتاب راده‌ماخرا^۱ و توپلیتس^۲ (اعداد و اشکال) را به من داد. نوشته کاملاً قابل توجهی است شامل نظریه کاتور، هندسه مقدماتی مثلثها و چیزهایی درباره اعداد اول. هرچند مطالب آن را زیاد نمی‌فهمیدم ولی برایم هیجان‌انگیز بود، خیلی خوب نوشته شده بود.

ر.ل. چه اهمیتی برای انتخاب تعریف خوب، اصطلاحات خوب و نمادگذاری خوب قائل هستید؟

م.گ. اهمیت دارد، ولی اهمیتش در مقایسه با جوهر موضوع، ثانویه است.

ر.ل. ریاضیات و هنر، موسیقی، نقاشی، ...

م.گ. منظورتان چیست: مقایسه، روابط متقابل؟

ر.ل. هرچه [بفرمایید].

م.گ. البته ریاضیدانان در تعامل با هنر هستند.

ر.ل. من متوجه نوعی همبستگی بین بعضی رشته‌ها شده‌ام. [مثلاً از احساس خود] [بگویم]، وقتی نقاشی از پیشرفت باز می‌ایستد، ریاضیات هم دچار استنایی می‌شود.

م.گ. این نظر شخصی است و من اطلاع کافی از هنر ندارم تا پاسخ بدهم، شاید ارزش مطالعه داشته باشد، شاید هم نه.

ر.ل. ریاضیات و رایانه، رابطه با آموزش.

م.گ. چقدر ریاضیات ممکن است تحت تأثیر ماشین دگرگون شود؟ قطعاً بی‌اندازه دگرگون خواهد شد. همین الان هم این اتفاق افتاده است. اکنون ریاضیات مخلوطی وجود دارد که افراد شهودشان را بر پایه مقدار زیادی آزمایش عددی بنا می‌کنند، مثل مکانیک آماری و آشوب.

ر.ل. نظرتان در این باره چیست؟

م.گ. عالی است! چیز نوی است و ممکن است ریاضیات فعلی را نابود کند، ولی این سرنوشت هر موجود زنده است که می‌میرد، و ریاضیات هم ممکن است بمیرد. نوع جدیدی از تفکر وجود خواهد داشت، احتمالاً کارآمدتر، زیرا ابزاری اضافی را به خدمت خواهد گرفت. فکر می‌کنم که ما نهایتاً در گروههایی با رایانه‌ها کار خواهیم کرد و قضیه ثابت نخواهیم کرد؛ ما [در حال حاضر] بیش از حد به اثبات اتکا داریم. قضایای نیمه‌اثبات شده وجود خواهند داشت، و این نوع دیگری از بازی است. ولی شاید کاملاً عطش ریاضیمان را برای دانش فرو نشانند، به هر حال بغرنج است.

ر.ل. درست است، چون به ماشین وابسته است، و ماشین ممکن است خطا کند.

م.گ. نه، این‌طور نیست، آن رایانه‌های شطرنج‌باز را در نظر بیاور. مطمئناً بهتر از هر کسی، شاید به استثنای یکی دو نفر در جهان، بازی می‌کنند، ولی هنوز می‌توانیم شطرنج بازی کنیم چون دوستش داریم.

ر.ل. درست.

م.گ. این [استفاده از رایانه] طرز تلقی از شطرنج را کاملاً دگرگون می‌کند. فکر نمی‌کنم شطرنج تا سی سال دیگر حضوری جدی داشته باشد. رایانه‌ها آن را بهتر انجام می‌دهند، پس جالب نیست. تصور کنید چه می‌شود اگر چنین اتفاقی برای ریاضیات بیفتد. اگر رایانه‌ها واقعاً آن را بهتر انجام دهند شاید نوع متفاوتی از ریاضیات داشته باشیم.

ر.ل. لروی گورهان^۱ [در کتابی] نوشت که بشر در طول قرون موفق شد فعالیتهايش را صورت خارجی بخشد، ابتدا ابزارهایی تولید کرد، سپس ماشینها را، تا انرژی به دست بیاورد. اکنون با استفاده از رایانه‌ها قسمتی از فعالیتهايش مغز صورت عینی می‌یابد.

م.گ. در صورت بقای تمدن ما، رایانه‌ها در هر کار فکری محضی گوی سبقت را از ما خواهند ربود. چند سال طول خواهد کشید؟ ۱۰، ۲۰، ۵۰ یا ۱۰۰ سال؟ فکر می‌کنم کمتر از ۱۰۰ سال. ساختار جدیدی از زندگی ظهور خواهد کرد. مغز، همان‌طور که نیروی عضلانی امروزه خوار است، خوار خواهد شد. البته به کمک نیروی عضلانی می‌شود پول زیادی در بازی بسکتبال درآورد، ولی نه در کاریدی. در مورد مغز هم همین‌طور است. هیچ امر مقدسی در این باره وجود ندارد. نئوکورتکس^۲ [قشر نوین مخ] که (فرض می‌شود) [مسئول] اعمال ریاضی است از نظر تکاملی، تازه و بسیار ابتدایی است و نهایتاً در خواهیم یافت چگونه کار می‌کند یا به هر حال آن را مدل‌سازی می‌کنیم؛ چرا نکنیم؟

ر.ل. چرا نکنیم؟

م.گ. هیچ دلیلی، مطلقاً هیچ دلیلی، وجود ندارد که بگوییم این غیرممکن است. افرادی مانند پنروز^۳ هستند که نظراتی برخلاف این دارند، ولی ...

1. Leroy Gourhan 2. neocortex 3. Penrose

1. Rademacher 2. Toeplitz

ر. ل. با این موافقم، از آنجا که ما از ماده ساخته شده‌ایم، اجتماعی از سلولها و رابطها هستیم، پس چرا تصور نکنیم که روزی ماشین به همان سطح از پیچیدگی برسد.

م. گ. محتمل است که سخت‌افزار الکترونیکی (با پردازش موازی) در عرض ۳۰ تا ۵۰ سال دیگر به پای ظرفیت سیناپسی مغز ما (حدود 10^{14} سیناپس در قشر مخ) برسد. آن‌طور که از تغییرات ژنتیکی (حدود 10^3 ژن) قشر مخ در یک میلیون سال اخیر تکامل بشری بر می‌آید، نرم‌افزار موردنیاز در حدود 10^{10} تخمین زده می‌شود. حتی قابل تصور است که ۲۰-۱۰ صفحه برنامه‌نویسی هوشمندانه (خیلی هوشمندانه)، یک رایانه سان^۱ را قادر به یادگیری ریاضیات ظرف چند ماه کند. طبیعتاً نوشتن چنین برنامه‌ای به مسأله متداول NP بر می‌خورد ولی موفقیت تکامل زیستی (و نیز پیروزی شگفت‌آور ریاضیات بشری بر NP) ما را خوشبین می‌سازد، و حتی رایانه‌های امروزی نگرش ما را تغییر می‌دهند.

ر. ل. ... و نحوه تفکرمان را؟

م. گ. و نحوه تفکرمان را، و نگرش عاطفی‌مان را. هرچه باشد، اثبات قضیه‌ای با چندین صفحه محاسبه تفاوت چندانی با محول کردن آن به کامپیوتر نمی‌کند. ولی وقتی این دومی فراهم باشد، اعتباری که برای چنین اثباتی قائلیم، و لذا التذادی که از آن می‌بریم فروکش می‌کند. ولی احتمالاً راه‌های دیگری برای هدایت تمایلاتمان به ریاضیات خلاقه خواهیم یافت.

ر. ل. سوالات دیگری در نظر دارید که بخواهید از شما پرسیده شود؟

م. گ. از دیدن اینکه چگونه بشریت گرانبهاترین سرمایه‌ای را که دارد، یعنی اذهان دست نخورده کودکان با استعداد را، ضایع می‌کند اندوهگین می‌شوم. اینها یا بی‌خردانه نابود می‌شوند یا برای رضایت معلمانشان تغییر شکل می‌دهند و ما حتی متوجه نمی‌شویم. اما چگونه باید آموزش و پرورش را سبکتر کرد و در عین حال سطح کلی را بالا نگه داشت؟ تنها امید من جایگزین کردن معلمان با کامپیوتر است. این کار اذهان حساس را از فشارهای سلطه‌جویانه رها می‌سازد. همچنین آرزو می‌کنم آموزش و پرورش برای همگان متنوع‌تر باشد.

ر. ل. حتماً ممکن است، حتی اگر آموزش و پرورش دولتی باشد، در فرانسه کلاسهای مخصوصی برای موسیقیدانان یا ورزشکاران آینده هست. م. گ. از یک طرف باید مبنای مشترکی موجود باشد وگرنه جامعه از هم می‌پاشد. بعد باید راهی برای ارائه کردن مسائل مختلف در مدارس یافت. این تنها یک تمایل است، ولی چنین تنوعی جو فکری در جهان را بی‌اندازه بهبود خواهد بخشید.

ر. ل. يك راه برای ایجاد کمی تنوع این است که از دانش‌آموز بخواهیم پروژه‌ای تهیه کند، این می‌تواند فقط يك مبحث باشد که باید شخصاً تهیه کنند. م. گ. نه، مسأله فقط عرضه کردن چیزهای متفاوت به آنهاست. مثلاً علوم طبیعی، علوم انسانی و ریاضیات هست. این همه چین، درحالی‌که دانش‌آموزان هیچ نمی‌دانند. به نحوی باید در معرض این مباحث گوناگون قرار گیرند و سپس به آنان اجازه انتخاب داده شود. دادن آزادی انتخاب به

ر. ل. بلکه، خیلی زود هنگام یا به روشی خصیصی مستقیم، ممکن است خطرناک باشد.

م. گ. و چه کسی درباره جهت دادن تصمیم می‌گیرد؟

ر. ل. و چه قدر زمان برای تصمیم‌گیری‌ها صرف خواهد شد؟ نمی‌توانید بهترین افراد را بخواهید و صرفاً به کار تصمیم‌گیری درباره دیگران وادارید، آنها [هم] مشغولیت‌های خودشان را دارند که باید به آن برسند.

م. گ. بله، ولی فکر می‌کنم ممکن است، البته مسأله باید بررسی شود. پس از تعریف اهداف (که البته کار ما نیست، بلکه امری عمومی است)، نگاه در این چهارچوب باید ممکن باشد، می‌توانید آموزش و پرورش را نظام دهید. بازم [بگویم که] خیلی طرفدار تکثر و تنوع فکری هستم. هرچه توسط اذهان خالق شده است باید توسط اذهان دیگر جذب شود. چون یک شخص نمی‌تواند همه چیز را فرا بگیرد، کار باید بسته به سلاقی تقسیم شود. جامعه مرفه‌تر و مرفه‌تر می‌شود بنابراین بیشتر و بیشتر می‌توانیم از پس آموزش خودمان برآیم. مسأله، نحوه انجام این کار است. ما به عنوان مربی معتقدیم که مردم این‌گونه سعادتمندتر خواهند بود. البته ما از این لحاظ بی‌طرف نیستیم. برخی نمی‌خواهند آموزش ببینند. شاید بسیاری امتناع کنند. ولی در جامعه‌ای با فن‌آوری پیشرفته وجود افراد تعلیم‌نپذیر بسیار خطرناک است. پیامدهای آن ممکن است ویرانگر باشند، مثل صدور حکم $\pi = 3$ با اکثریت آرا.

ر. ل. از حکم دادن بر علیه نظریه کمال بر پایه مذهب خبر دارید، ولی از دای‌گیری درباره مقدار π نه.

م. گ. نگاهی به کتاب پائولوس^۱ به نام بی‌سوادی عددی بیندازید. مردمی هستند که معنی عددها را درک نمی‌کنند. از آنها پرسید «چند نفر در نیویورک زندگی می‌کنند، ۱۰،۰۰۰، ۱۰،۰۰۰، ۱۰،۰۰۰، ۱۰،۰۰۰، ۱۰،۰۰۰، ۱۰،۰۰۰» هیچ احساسی ندارند. اینها کسانی هستند که به طالع‌بینی معتقدند. چیزهایی از قبیل مفهوم مرتبه بزرگی، باید جزئی از فرهنگ عمومی باشد. متأسفانه این هیچ‌وقت آموزش داده نمی‌شود. حتی برخی ریاضیدانان فاقد این [سواد عددی] هستند.

ر. ل. مثلاً این سؤال که چند قطره آب در دریاها و اقیانوسها موجود است سؤالی است هوشمندانه.

م. گ. یا، فوراً بگو، به چند کیلومتر مکعب برای جا دادن مثلاً جمعیت اروپا نیاز است؟

1. Paulos

1. Sun